二十世紀のワーリング問題とその周辺 (解析数論の展望と諸問題)

川田, 浩一

数理解析研究所講究録 1219 巻 2001 年 91-102

二十世紀のワーリング問題とその周辺

岩手大学 教育学部　川田 浩一 (Koichi KAWADA)
Faculty of Education, Iwate University

1. はじめに

今回、加法的整数論のこれまでの進展やこれからの課題などについてはなしをすることになった。サーベイ的なはなしをするのは初めてであり、荷が重いと感じる面もあったのだが、これまでのところを振り返るいい機会と思い、張り切って引き受けさせていただいた。

加法的整数論における代表的な研究テーマとしては、Goldbach 問題や双子素数問題の系統、Waring 問題の系統、Additive divisor problem* の系統、などがある。そのうち、この数年自分がずっと取り組んでいる Waring 問題を話題にすることにした。極力テーマを絞ろうと思い、なかでも $G(k)$† に関する話題、とくに mean value estimates の評価の進展を中心に、はなしを組み立てることにしたのだが、それでも触れる内容を取捨選択することは難しい作業であった。結局、1 時間のサーベイとしてよい出来とはいえないものに終わったことを反省しているところである。ここではもう一度、簡潔にはなしをまとめ直してみたいと思う。内容や文献などについてより詳しい情報を望まれる方には、やはり Vaughan の本 [9] を参照いただきたい。

2. サークルメソッド以前

すべての自然数は高々4 個の平方数の和で表せることを Lagrange が証明したことをうけて、Waring‡ は 1770 年に、すべての自然数は高々9 個の立方数§の和、高々19 個の 4 乗数の和、などと表すことができる、と証明

*和訳は聞いたことはないが、「加法的約数問題」とでも訳すのだろうか。

†定義は §3 に後述。

‡この節の参考文献については、Nathanson [4] の Bibliography を参照されたい。

§単に立方数と書いたが、自然数の 3 乗、即ち、“正の” 立方数を意味するものとする。以後同様に、正の k 乗数を単に k 乗数ということにする。負の k 乗数をも考慮に入れる場合は、Easier Waring's problem と呼ばれるが、これについては Nathanson [4] の §4.3 および Ch.2 の Exercise 6 を参照されたい。例えば、すべての整数は高々5 個の “正または負の” 立方数の和で表せることは容易に分かる。

なしで書き記し、これがWaring問題の発端となった。2以上の自然数kに対して、「すべての自然数が高々s個のk乗数の和で表せる」ようなsのうち最小のものを通例$g(k)$と表すが、例えば、23は8個の立方数の和で表せないし、79は18個の4乗数の和で表せない、といったことがすぐ分かるから、先のWaringの主張は、それぞれ$g(3)=9$、$g(4)=19$と表現される。もちろん、任意のkに対して$g(k)$が存在すること、いいかえれば、すべての自然数が、kのみによって決まる有限な個数のk乗数の和で表せることは、自明なことではない。実際、もともとは「Waringの問題」といえば、この「任意のkに対して$g(k)$の存在を証明すること」を指していたようである。いろいろなkに対して、具体的に$g(k)$の上界を与える論文が発表されているが、結局すべてのkに対する$g(k)$の存在は、20世紀初めの1909年にHilbertにより証明された。

このHilbertの仕事のほかに、この節で特記すべきものとして、$g(3)=9$の証明をあげたい。この証明は1909年にWieferichが発表したが、その一部の誤りが1912年にKempnerにより指摘・修正された。いずれにしてもサークルメソッドが開発される以前のWaring問題の研究は、特殊な恒等式を見つけることと、いくつかの平方数の和で表される自然数に関する古典的な結果に基づいた、代数的・初等的な方法によってなされていたようである。少なくとも、この節に記した2つの結果を含めて、筆者が目にしたものはすべてそうであったといえる。

3. サークルメソッド

サークルメソッドはHardyとRamanujanの分割数の研究の中で創始された、とされている。にもかかわらずその名称は、the Hardy-Littlewood methodといわれることはあっても、Ramanujanの名前が入れられることがないのはなぜなのか、筆者は実は知らない。名前のことをいえば、この方法を現在の形に簡略化したとされるI. M. Vinogradovも含められてよいのではないかと思える。もちろん、Waring問題に初めてサークルメソッドを適用したのがHardyとLittlewoodであったのは確かであるし、彼らの貢献が大きかったことは異論のないところであろう。ま、the circle methodといっておけば、その辺の事情を気にせずに済むので楽である。

サークルメソッドによる議論の概要については以下に触れるが、それによれば、「kに対してsがある程度大きければ、ある数$N(k,s)$が存在して、それ以上の自然数はすべてs個のk乗数の和で表せる。」というようなタイプの結論を導くことができるようになった。kに対して、そのような$N(k,s)$が存在するような最小のsは、$G(k)$と表される。この

$G(k)$ が有限であることと、前節で定義した $g(k)$ が有限であることは同値だが、実際問題としては、それだけではない。$n = 2^k[(3/2)^k] - 1$ とおくと、$n < 3^k$ だから、n をできるだけ少ない個数の k 乗数の和で表そうとしても、$([(3/2)^k] - 1)$ 個の 2 の k 乗と $(2^k - 1)$ 個の 1 の k 乗の和で表すしかないから、

$$g(k) \geq 2^k + [(3/2)^k] - 2$$

であることはすぐにわかる¶。したがって、$G(k) \leq 2^k + [(3/2)^k] - 2$ が証明できれば（より厳密に言えば、$s = 2^k + [(3/2)^k] - 2$ に対して上述の $N(k, s)$ が計算可能だとわかれば）、原理的には $g(k)$ の値を決定することが可能となる。加えて、$k > 2$ なら $G(k)$ は $g(k)$ よりずっと小さいと予想されるのである。このような事情により、1920 年頃から Hardy と Littlewood がサークルメソッドによる Waring 問題の研究を始めてからは、興味の対象は $g(k)$ から $G(k)$ へと移ることになったのである。

さて、サークルメソッドによる典型的な議論の概要をみよう。k は 3 以上‖、s は k に対してある程度大きい自然数とし、これら k、s を固定したとみなし、十分大きい自然数が必ず s 個の k 乗数の和で表せることを証明することを目標とする。k 個の k 乗数の和で表せない自然数が無限個あることは容易に分かるので、s は少なくとも $k+1$ 以上であることが必要だが、どれだけ小さい s を扱えるか、が焦点である。大きい自然数 n に対し、

$$P = n^{1/k}, \qquad f(\alpha) = \sum_{1 \leq m \leq P} e(m^k \alpha), \quad \text{ただし } e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha} \tag{1}$$

とおく。n を s 個の k 乗数の和で表す方法が、$R(n)$ 通りだとすると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\alpha)^s e(-n\alpha)d\alpha &= \sum_{1 \leq m_1, \ldots, m_s \leq P} \int_0^1 e((m_1^k + \cdots + m_s^k - n)\alpha)d\alpha \\ &= \sum_{\substack{1 \leq m_1, \ldots, m_s \leq P \\ m_1^k + \cdots + m_s^k = n}} 1 \quad = R(n) \end{aligned} \tag{2}$$

¶$g(k)$ に関して現在知られていることについては、Vaughan [9] の p.2 を読まれたい。直前の行の不等式において常に等号が成立することが予想されており、実際 4 億以下の k に対しては等号が成立すること、および、等号が成立しないような k は高々有限個しかないこと、などが知られている。

‖$k = 2$ の場合でも $s \geq 5$ なら同様の議論が成立するし、$s = 4$ のときには Kloosterman の仕事がある。

を得る。蛇足だが、$F(z)=\sum_{1\le m\le P} z^{m^k}$ とおけば $F(z)^s$ の z^n の係数が $R(n)$ となるから、留数定理により、$F(z)^s z^{-n-1}$ を $|z|=1$ 上で積分すれば $R(n)$ の表示が得られる。これを $z=e(\alpha)$ と置換すれば上の表示(2)になる。もともとの積分路が円 $|z|=1$ であったことが、circle method あるいは後出の major arc、minor arc などの用語の由来である。また、Hardy-Littlewood は初めは無限和 $\sum_{m=1}^{\infty} z^{m^k}$ を用いており、これを前出の有限和にすることで議論を簡潔にしたのは Vinogradov である。

いずれにしても(2) の左辺の積分をどう計算するか、が問題となるわけだが、ここで例えば

$$\mathfrak{M}=\bigcup_{q\le P/(2k)}\ \bigcup_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q}\{\alpha\in[0,1]:\left|\alpha-\frac{a}{q}\right|\le(2kP^{k-1})^{-1}\},\qquad \mathfrak{m}=[0,1]\setminus\mathfrak{M}$$

と定義し、

$$R(n,\mathfrak{B})=\int_{\mathfrak{B}} f(\alpha)^s e(-n\alpha)d\alpha$$

とおけば、もちろん

$$R(n)=R(n,[0,1])=R(n,\mathfrak{M})+R(n,\mathfrak{m})$$

である。$\mathfrak{M}$ は、分母の "小さい" 分数に "近い"α の集合であるが、一般にそのような集合は優弧 (major arc) と呼ばれ、$\mathfrak{m}$ のような優弧の補集合は劣弧 (minor arc) と呼ばれる。α が $\mathfrak{M}$ に属しているときは $f(\alpha)$ の挙動が把握でき、実際 $s\ge k+1$ でありさえすれば優弧上の積分 $R(n,\mathfrak{M})$ は漸近的に計算できる。即ち $R(n,\mathfrak{M})$ については必要なことはすべてわかっているといってよい。詳しくは Vaughan [9] の 2 および 4 章を参照いただくことにして、結果だけ述べるが、$s\ge k+1$ で、かつすべての自然数 q に対して合同式

$$m_1^k+m_2^k+\cdots+m_s^k\equiv n\pmod q \tag{3}$$

が $(m_1,q)=1$ なる整数解 $m_1,\dots,m_s$ をもてば、

$$R(n,\mathfrak{M})\gg n^{s/k-1}$$

であることが知られている**。上からの評価としては、$R(n,\mathfrak{M})\ll n^{s/k-1+\varepsilon}$

**Vaughan [9], Theorems 4.3, 4.4, 4.6 参照。ここに現れた合同式にまつわる条件は、「$s\ge 4k$」であるか、あるいは「k が 2 のべきでなく、かつ $s\ge 3k/2$」であれば成立するし、k によってはもっと小さい s に対しても成立することがある。また、この合同式条件を課すことは実は自然なことなのである。条件 $(m_1,q)=1$ についての説明は場所をとるので割愛するが、合同式(3) については、それ自身が整数解をもたなければ n は s 個の k 乗数の和で表せないことがすぐに分かる。

であること、さらに $s \geq k+2$ なら ε を削除してよいことが知られている。ここで ε は任意に与えられた正数で、Vinogradov の記号 $\ll$ に含まれる定数は ε に依存する。これ以後も断りなく、この記号 ε に関する周知の慣習に従う。

もっとも初めからこれだけのことがわかっていたわけではなく、$R(n,\mathfrak{M})$ の計算がうまくいくために必要な変数の個数 s は最初のころはもっと多かった。しかし、劣弧上の積分 $R(n,\mathfrak{m})$ に対する十分な評価を与えるためには、いずれにしても s はもっと大きくなければならなかったので、$R(n,\mathfrak{M})$ よりも $R(n,\mathfrak{m})$ のほうをどう扱うのか、というのがいつでも課題となっていた。サークルメソッドの出現以降の Waring 問題の研究の進展の歴史は、劣弧上の積分を評価する技術の歴史といえるであろう。この、おそらく誤差項になるであろうものをちゃんと押さえられるかどうか、が主役になるというのは、解析的整数論においては当たり前といえば当たり前ではある。

さて、$R(n)$ の主要項は $R(n,\mathfrak{M})$ から現れるであろうと予想され、その大きさが $n^{s/k-1}(=P^{s-k})$ 程度であるから、$P\to\infty$ のとき

$$R(n,\mathfrak{m}) = o(P^{s-k}) \tag{4}$$

であることが示せれば、n が十分大きければ $R(n)>0$、即ち n は s 個の k 乗数の和で表せることになり、したがって $G(k)\leq s$ が証明される。

肝心の $R(n,\mathfrak{m})$ の評価は、$2t<s$ なる自然数 t を適当に選び、

$$|R(n,\mathfrak{m})| \leq \left(\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}}|f(\alpha)|\right)^{s-2t}\int_0^1 |f(\alpha)|^{2t}d\alpha$$

という不等式により与えられるのが常である。そこで、次の2点が重要な課題となる：

課題 A 劣弧 $\mathfrak{m}$ に属する α に対する $|f(\alpha)|$ の評価を与える。

課題 B 平均値 $U(P,t)=\displaystyle\int_0^1 |f(\alpha)|^{2t}d\alpha$ の評価を与える。

課題 A に関しては、

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}}|f(\alpha)| \ll P^{1-\sigma_k+\varepsilon} \tag{5}$$

という形の不等式を、できるだけ大きい σ_k に対して示したい、ということになる。$f(\alpha)$ について知られていることなどからみて、この不等式を

成立させる最大の σ_k は $1/k$ であろうと予想される[††]。1916年に発表されていた Weyl の不等式 ([9], Lemma 2.4) によれば、$\sigma_k = 2^{1-k}$ ととれる。これは $k=2$ のときは先の予想と一致していてこれ以上望めない形だが、$k \geq 3$ のときはもっと改良されることが期待される。しかし、k が3から5程度の場合には Weyl の不等式を超えるものはまったく見つかっておらず、これは間違いなく今後の大きな課題の一つである。

一方、$U(P,t)$ の形の平均値の評価から、(5) の形の不等式を導くという、Vinogradov 流の方法があり、これにより k が大きいときは Weyl の不等式よりよい結果を得ることができる。この流儀によれば、平均値に対してよい評価を得れば(5) の不等式に関しても強い結果が従うわけだから、この意味で課題 A は課題 B に帰着されることになる。正確な言い方ではなくなるが、課題 A に関しては実際こういう方向によって、現在では $k \geq 7$ ならば Weyl の不等式より強い効果をもつ結果が得られている。これは後で述べる Vaughan-Wooley [10] の平均値に関する成果から従うものである。また、Weyl と Vinogradov のアイディアを融合した Heath-Brown [3] の素晴らしい仕事があるが、$G(k)$ の評価には直接の影響がないので、ここでは触れないことにする。

次に課題 B に目を移そう。上記の通り、課題 A への影響もあるし、平均値 $U(P,t)$ を評価することはとても重要である。これに関しては、

$$U(P,t) \ll P^{t+\varepsilon} + P^{2t-k+\varepsilon}$$

という評価が予想がされているが、$0 \leq t \leq 2$ のとき、および t が k と比べてすごく大きいときにしか証明されていない。とくに $t=k$ のとき $U(P,k) \ll P^{k+\varepsilon}$ と予想されるが、もしこれが証明できれば、(5) とあわせて、$s \geq 2k+1$ なら(4) を示せるので、(2) の左辺の積分が計算できることになり、したがって合同式(3) にまつわる条件を満たす十分大きい n は、$2k+1$ 個の k 乗数の和で表せることが示せることになる。そしてそのあたりがサークルメソッドという方法の限界だろうといわれている。つまり少なくとも今のところは、変数の個数 s が $2k$ より小さいと、(4) を証明する方法を想像することすらできない、ということである。

$U(P,t)$ の評価に関しては、Hua の不等式 ([9], Lemma 2.5) と Vinogradov の平均値定理 ([9], Theorem 5.1) が基本的な結果である。この $U(P,t)$ そのものに対する評価としては、$k \leq 5$ の場合には Hua の不等式を大きく超えるものが出ていないが、Vaughan [5], [6] の仕事は特筆すべきもので

[††] Vaughan [9] Theorems 4.1, 4.2 および Theorem 4.1 の直後の予想を参照。

ある。6 以上の k に対してはいくつかの改良がなされており、現在最良の結果は、Heath-Brown [3] (Boklan [1] も参照)、Ford [2]、Wooley [12] らによる。

しかし、$G(k)$ の評価を問題にする場合は、実は $U(P,t)$ を直接相手にしない、もっと有効なアイディアがある。とりあえず簡潔に概要をみるために上のような道筋を示したのだが、そのような手順でうまくいけば、$R(n)$ に対する漸近式が得られ、それから $G(k) \leq s$ が従う。が、$G(k) \leq s$ を示すのが目的なら、十分大きい n に対して $R(n) > 0$ となっていればいいわけで、$R(n)$ の漸近式は必ずしも必要ではない。つまり、上のやり方では

$$n = m_1^k + m_2^k + \cdots + m_s^k \tag{6}$$

を満たすすべての自然数の組 $(m_1, \ldots, m_s)$ を数えようとしていたわけだが、そのような組のうちの特別なもの、数えやすいものだけをみることにしよう、という着想がある。これによって課題 B にあたる結果が格段に良くなり、したがって $G(k)$ に対しても良い評価が得られる。こういう方針は既に Hardy-Littlewood 自身が示している。具体的に(6) の右辺の k 乗数にどのような制限をつけるのか、については次節でみることにする。このような方向における課題 B についての進展が、サークルメソッドの発見に始まる二十世紀の Waring 問題の研究の歴史のハイライトであると、筆者には思える。

ところで(6) において、m_j 達は自然数なら何でもいい、としておくとそういう表示があることが (直接は) 示せないのに、m_j 達に適当な制限を加えるとそういう表示があることが示せる、というのは、少なくとも表面的には、面白いといえるのではなかろうか。解析的整数論では誤差項の評価が問題の中心になることが多いから、そのようなことは間々あるわけだが、筆者も初めて聞いたときはとても不思議に感じられたものである。

4. Diminishing range methods

前節で定義した $U(P,t)$ は、不定方程式

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_t^k = y_1^k + y_2^k + \cdots + y_t^k \tag{7}$$

の、$1 \leq x_j, y_j \leq P$ を満たす自然数解の個数に等しい。いま、

$$P_1 = P/2, \qquad P_j = \frac{1}{2} P_{j-1}^{1-\frac{1}{k}} \quad (j \geq 2)$$

とおき、$U(P,t)$ が数えている解のうち、

$$P_j < x_j,\ y_j \le 2P_j \quad (1 \le j \le t) \tag{8}$$

なるものの個数 V を評価してみる。この条件(8) と方程式(7) から、P が十分大きければ、

$$|x_1^k - y_1^k| = \left|\sum_{j=2}^{t}(y_j^k - x_j^k)\right| \le (2^k - 1)P_2^k + O(P_2^{k-1}) < (2P_2)^k = P_1^{k-1}$$

を得るが、一方、

$$|x_1^k - y_1^k| = |x_1 - y_1|(x_1^{k-1} + \cdots + y_1^{k-1}) > |x_1 - y_1|P_1^{k-1}$$

だから、$|x_1 - y_1| < 1$、即ち $x_1 = y_1$ でなければならない。すると、(7) から x_1 と y_1 を消去すれば $x_2^k + \cdots + x_t^k = y_2^k + \cdots + y_t^k$ となり、同様にして $x_2 = y_2$ が従う。以下この議論を繰り返して、(8) をみたす(7) の解は、$x_j = y_j$ $(1 \le j \le t)$ という自明なものしかないことがわかり、よって解の個数 V については、(8) より、

$$V \ll P_1P_2 \ldots P_t \tag{9}$$

であることがわかる。

Hardy-Littlewood が指摘したこの極めて単純な事実[‡‡]は、加法的整数論における非常に強力な武器であって、驚くべきことかもしれないが、いまだに応用する問題によっては、この方法・結果を実質的に超えるものが見つかっていないといえる。

上の V の評価(9) の強さを確認しよう。このような場合、方程式(7) を無視して、単に変数のとりうる値の組み合わせが何通りかをまず数えると、もちろんそれは解の個数に対する自明な評価になるわけだが、その「自明な評価」からどれだけおとせたか、が重要なのである。例えば、$U(P,t)$ に対しては、ここでいう自明な評価は P^{2t} で、$U(P,t)$ の上からの評価は P^{2t} と比べてどのくらいおちているか、が問題となる。先の V に対しては自明な評価は、(8) より $(P_1P_2 \ldots P_t)^2$ で、(9) から、

$$V \ll (P_1P_2 \ldots P_t)^2 \cdot (P_1P_2 \ldots P_t)^{-1}$$

[‡‡] 本当は Hardy-Littlewood は $1 \le j < t$ に対しては上のように P_j を定義し、$P_t = P_{t-1}$ として、同様の議論をした。大きな差はないが、この点については [9] §6.1 を参照。

だから、これは自明な評価から

$$P_1P_2\dots P_t \asymp P^{1+(1-1/k)+\dots+(1-1/k)^{t-1}} = P^{k-k(1-1/k)^t}$$

だけおちている*。仮にある程度大きい C に対して $t \geq Ck\log k$ だとすると、$k(1-1/k)^t < ke^{-t/k} \leq k^{1-C}$ だから、(9) の右辺は自明なものから $P^{k-k^{1-C}}$、雑にいえば P^k ぐらいおちていることになる。

$U(P,t)$ に対して自明な評価から P^k ぐらいおとすということは、

$$U(P,t) \ll P^{2t-k+\delta} \tag{10}$$

のような不等式を小さい δ について示す、ということであるが、例えば Hua の不等式は t が 2^k ぐらい大きいときそのような結果を与える。大きい k に対して現在最良の Ford [2] の仕事をもってしても $t \gg k^2\log k$ ぐらいでないと(10) のような結果を示すことはできない。$G(k)$ への影響を考えると、変数の個数は少なく (t は小さく)、自明な評価からのへこみは大きい、というのが良い結果ということになるので、少なくとも大きい k に対しては、不等式(9) はとても強力であることがわかるのである。この(9) に、前節の課題 B にあたるこういう結果から課題 A に対応する結果を導く Vinogradov のアイディアを加えて、Vinogradov は 1935 年に

$$G(k) \leq 6k(\log k + O(\log\log k)) \tag{11}$$

を示した。それ以前の $G(k)$ の上界は 2^k より大きいものだったから、これは大きい k に対しては大幅な改良となった。その後課題 A の導き方に関して工夫を加えて、Vinogradov は 1959 年には(11) の右辺の 6 を 2 までおとしているが、その際にも課題 B に関しては(9) が用いられている。

上の(9) を導く Hardy-Littlewood の議論の改良はいろいろとなされたが、いずれも k が大きくなると急速に効果が薄れるものばかりで、そのような改良が $G(k)$ の評価にもたらす影響は、(11) のような結果の $O(\log\log k)$ の項に含まれてしまう。とはいえ小さめの k に対しては有効な方法がいくつか見つかっている。これらの改良された方法達は、(7) における k や t の大きさによってどれがもっとも勝るかが変わるので、一概に誰の方法が現在最良、と言い切れないのだが、中でも 1940 年前後の Davenport の仕事が最も大きいといえるだろう。加えて 1980 年代中頃の Thanigasalam と Vaughan が (独立に) 成した貢献が大きい。とくに Vaughan は、この

*$A \asymp B$ は $A \ll B \ll A$ の意味である。

Diminishing range method に関する彼の着想を次節の p-adic method に応用することで、画期的な成果を挙げることとなった。

5. Vaughan's p-adic method

前節の Diminishing range method というのは、(7) の解の個数を評価する際、x_1 と y_1 の距離が小さい、という事実をもとに議論を組み立てるのだが、この際の "距離" を p 進付置で置き換えたものが p-adic iterative method などと呼ばれるものである。いま、$P^{1/k} < p \leq 2P^{1/k}$ で、かつ k を法として 1 と合同ではない素数 p をとり、(7) の x_1、y_1 は p で割り切れず、$x_2, \ldots, x_t$, $y_2, \ldots, y_t$ はすべて p の倍数であるとすると、

$$x_1^k - y_1^k = \sum_{j=2}^{t}(y_j^k - x_j^k) \equiv 0 \pmod{p^k}$$

で、$p^{k-1}(p-1)$ と k は互いに素だから、$x_1 \equiv y_1 \pmod{p^k}$ となる。$p^k > P$ だから、$1 \leq x_1, y_1 \leq P$ なら $x_1 = y_1$ でなければならない。この事実に基づいて、(7) の変数にうまく条件をつけて解が $x_j = y_j$ $(1 \leq j \leq t)$ の形に限るようにできるが、そのようにして得られる解の個数に対する評価は、(9) と同じ精度、即ち、「自明な評価」から $P^{k-k(1-1/k)^t}$ だけへこんでいるものとなる。これが p-adic method の最も単純な形である。

こういう方法はより進んだ形で既に 1939 年の Davenport の論文に現れているし、Linnik、Karatsuba といった人たちの貢献もある。そして飛躍的な進展をもたらしたのが Vaughan [7] である。そのアイディアのもとは既に [5] のなかにみることができる。

Diminishing range method より p-adic method のほうが強力な結果を導ける理由の一つは、先のような議論において、素数 p を動かす余地があることである。が、Vaughan の方法の最も強調されるべきと思われる利点は、不定方程式(7) においてさっきのように x_j, y_j $(2 \leq j \leq t)$ が共通に素因数をもたなくても、それぞれが適当な大きさの約数さえもっていれば、(7) の解の個数を $U(P, t)$ のような積分で表して Hölder の不等式を使うことにより、同じような議論に持ち込むことができる、ということである。これにより、各変数は「都合のよい大きさの約数」をもちさえすればよいので、小さい素因数しかもたない自然数、いわゆる smooth numbers に各変数を制限すれば十分となる。この各変数につける条件の均一性が、以前の Diminishing range method ではみられなかった、Hölder の不等式を応用する際の自由度を生み、それがその後の大きな発展の原動力となった。この Vaughan の方法の概要にもう少々踏み込みたかったが、これに

ついてはVaughan自身によるサーベイ[8]を参照いただくこととし、ここでは紙面と時間†の都合によりこの辺にとどめることとする。

1989年のVaughanの仕事[7]以来、その方法の自由度を最大限に生かす方法が、Vaughan、Wooleyらを中心として模索され、この10年ほどの間に大きな進歩があったが、現在はその進歩も一段落したかな、という感がある。とくにWooleyはいくつかの有効な、また興味深いアイディアを提供している。そのうちの一つが、大きいkに対して初めて(9)を実質的に超えるものといえる結果を含んだ論文[11]で、そこでWooleyは(11)の右辺の定数6(既にVinogradovが2にしていたが)を1にまでおとしている。そのほか、小さめのkに関しては、Vaughan-Wooley [10]及び現在パートIVまで出ているそのシリーズを参照されたい。

6. 今後の課題など

サークルメソッドの開発以来、二十世紀の間に大きな進歩があったとはいえ、Waring問題などにおいては、すべてのkについて$G(k) \leq 4k$だろうとか、$G(3) = 4$だろうとか、現在証明できることからほど遠い予想がいくらでもあるが、その中からいくつかを課題として記させていただくことにする。

Waring問題そのものに関して筆者が個人的に最も興味を持っているのは、Linnikが1943年に証明した$G(3) \leq 7$の改良である。これはサークルメソッドで挑戦しようとするより、Watsonのようなやり方のほうが望みがありそうに感じられる。

つぎに、大きいkに対しては、期待される$G(k) \ll k$までいかなくても、$G(k) = o(k \log k)$ぐらいのことが当面の大きな壁といえるのではないだろうか。

また、3次などの低次の場合のWelyの不等式の改良も、大きな課題であろう。これはWaring問題などへの影響に限らず、それ自身興味ある問題だが、そろそろ100年近く進展がないことになる。

以上、やや無責任に書いてみたが、それらはどれも達成できれば素晴らしい成果であるが、いまのところ手がかりは全くない、という状況である。もう少し現実的な課題としては、Waring問題に関連する問題をあげておきたい。その例としては、素数のk乗数の和を考察するWaring-Goldbach問題と、k乗数の代わりに整数値をとるk次多項式の和を考える「多項式に対するWaring問題」がある。

---

†1月末が締め切りであったが、もうこの時点で既に3月になってしまっている。若林功先生をはじめ、ご迷惑をお掛けしている皆様に深くお詫び申し上げる次第です。

Vaughan [7] の方法以前は、Waring 問題の研究は Diminishimg range method によるものが主流であったから、Waring 問題に進展があれば、その方法は自動的に Waring-Goldbach 問題などにも進展をもたらしていた。しかし、前節でみた Vaughan の方法は、純粋な Waring 問題には応用できるが、変数を素数に限定したり、x^k を x の一般の k 次多項式で置き換えたりすると、適用できない。そのためこの 10 年ほどの間に Waring 問題そのものは劇的に進展した一方で、Waring-Goldbach 問題や多項式に対する Waring 問題は長いこと進展がみられない、という状態になっている。例えば、これらの問題では大きい k に対して(11) にあたる結果としては、(11) の 6 を 4 にすることしかできず、これはもう 50 年以上も改良されていない。こういうものの改良に挑戦するのも興味ある課題であろう。これらの問題には、いまのところ Diminishing range method を用いるしかないが、Thanigasalam は 1989 年以降も Diminishing range method に関わるアイディアを 2 つほど発表しているし、この方向で進む余地もまだ少しはありそうではある、と筆者も期待しているところである。

参考文献

[1] K. D. Boklan, The asymptotic formula in Waring's problem. Mathematika 41 (1994), 329-347.

[2] K. B. Ford, New estimates for mean values of Weyl sums. Internat. Math. Res. Notices 3 (1995) 155-171.

[3] D. R. Heath-Brown, Weyl's inequality, Hua's inequality, and Waring's problem. J. London Math. Soc. (2) 38 (1988), 216-230.

[4] M. B. Nathanson, "Additive Number Theory: The Classical Bases." Grad. Text Math. 164, Springer, 1996.

[5] R. C. Vaughan, On Waring's problem for cubes. J. reine angew. Math. 365 (1986), 122-170.

[6] R. C. Vaughan, On Waring's problem for smaller exponents, II. Mathematika 33 (1986), 6-22.

[7] R. C. Vaughan, A new iterative method in Waring's problem. Acta Math. 162 (1989), 1-71.

[8] R. C. Vaughan, The use in additive number theory of numbers without large prime factors. Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A 345 (1993), 363-376.

[9] R. C. Vaughan, "The Hardy-Littlewood Method. 2nd ed." Cambridge Univ. Press, 1997.

[10] R. C. Vaughan and T. D. Wooley, Further improvements in Waring's problem. I. Acta Math. 174 (1995), 147-240.

[11] T. D. Wooley, Large improvements in Waring's problem. Ann. of Math. 135 (1992), 131-164.

[12] T. D. Wooley, On Vinogradov's mean value theorem. Mathematika 39 (1993), 379-399; Corrigendum: ibid. 40 (1993), 152.